Полтавська область 2016-2017
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: техніки

9 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $|ax| < a,$ де a – параметр.

Розв'язання.

1. Зрозуміло, що $a > 0,$ тому $-a < ax < a \Leftrightarrow -1 < x < 1.$ Відповідь: якщо $a > 0,$ то $-1 < x < 1,$ в інших випадках розв'язків немає.

2. Порівняти числа $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ та 4.

Розв'язання.

2. $\sqrt{7} + \sqrt{3} ? 4 \Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{21} ? 16 \Leftrightarrow \sqrt{21} ? 3.$ Очевидно $\sqrt{21} > 3 \Rightarrow \sqrt{7} + \sqrt{3} > 4.$

3. В трикутнику дві медіани рівні. Довести, що трикутник рівнобедрений.

Розв'язання.

3. Нехай рівні медіани AA', BB' трикутника ABC перетинаються в точці *O*. Тоді $AO = \frac{2}{3}AA', BO = \frac{2}{3}BB' \Rightarrow AO = BO, A'O = B'O \Rightarrow \triangle AOB' = \triangle BOA' \Rightarrow AB' = BA' \Rightarrow AC = BC.$

II рівень

4. Середнє арифметичне 2017 різних натуральних чисел дорівнює 2017. Яке максимальне значення може мати найбільше серед цих чисел?

Розв'язання.

4. Найбільше число x матиме максимальне значення тоді, коли інші 2016 чисел як можна менші, тобто дорівнюють 1, 2, 3,…, 2015, 2016. Маємо рівняння $\frac{1 + 2 + ... + 2016 + x}{2017} = 2017 \Rightarrow x = 2017^2 - \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 2017 \cdot 1009.$

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці *O*, точка *K* є серединою сторони *AB*, *M* – точка перетину AC і KD. Знайти відношення *OM* до *AC*.

Розв'язання.

5. В $\triangle ABD$: AO, DK – медіани, тому $OM = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{6}AC.$

III рівень

6. Довести нерівність $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+x} \ge 1,$ де $x, y \ge 0, x + y \ge 2.$

Розв'язання.

6. За нерівністю Коші маємо $\frac{4x^2}{1+y} + (1+y) \ge 4x, \frac{4y^2}{1+x} + (1+x) \ge 4y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{1+y} + \frac{4y^2}{1+x} \ge 3(x+y) - 2 \Rightarrow \frac{4x^2}{1+y} + \frac{4y^2}{1+x} \ge 3 \cdot 2 - 2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+x} \ge 1.$$

7. Чи буде число $(2^2-1)(3^2-1)...(2017^2-1)$ точним квадратом?

Розв'язання.

7.. $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)...(2017^2-1)=(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)...(2017-1)(2017+1)=$

$=1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2015\cdot2017\cdot2016\cdot2018=1\cdot2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot...\cdot2016^2\cdot2017\cdot2018=$

$=\frac{1}{2}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2016)^2\cdot2017\cdot2018=(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2016)^2\cdot2017\cdot1009$ не є точним квадратом.

10 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{1-x}<\sqrt{1+x}.$

Розв'язання.

1. ОДЗ: $-1\le x\le1.$ Тоді $\sqrt{1-x}<\sqrt{1+x}\Leftrightarrow 1-x<1+x\Leftrightarrow 0<x.$ Відповідь: $x\in(0,1].$

2. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{1}{|x+1|+|x-1|}.$

Розв'язання.

2. Якщо розкрити модулі, то легко одержати, що $|x+1|+|x-1|\ge2\Rightarrow y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$

3. Знайти суму медіан трикутника зі сторонами 6, 8 та 10.

Розв'язання.

3. Нехай $AB=10, AC=6, BC=8\Rightarrow AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\angle C=90^\circ.$ Тоді сума медіан дорівнює $\frac{1}{2}AB+\sqrt{\frac{1}{4}AC^2+BC^2}+\sqrt{\frac{1}{4}BC^2+AC^2}=5+\sqrt{73}+\sqrt{52}.$

II рівень

4. При якому значенні параметра *a* рівняння $|x+2|+|x-2|=x^2+a$ не має розв'язків?

Розв'язання.

4. Нехай $f(x)=|x+2|+|x-2|, g(x)=x^2+a.$ Розкривши модулі, одержимо $x<-2\Rightarrow f(x)=-2x, -2\le x\le2\Rightarrow f(x)=4, x\ge2\Rightarrow f(x)=2x.$ Побудуємо графіки функцій $y=f(x), y=g(x)=x^2+a.$ Ці графіки не перетинаються при $a>4.$

5. В трикутнику *ABC* проведено висоти $AA', BB'.$ Відомо, що пряма $A'B'$ паралельна $AB.$ Довести, що трикутник рівнобедрений.

Розв'язання.

5. На AB як на діаметрі побудуємо коло. Тоді точки A', B' лежатимуть на колі (як вершини прямокутних трикутників). Маємо трапецію $AB'A'B,$ вписану в коло. Тоді вона рівнобічна. З рівності кутів при основі випливає, що трикутник рівнобедрений.

III рівень

6. Довести нерівність $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\le1,$ де $a,b\in[-1,1].$

Розв'язання.

6. Нехай $a=\sin\alpha, b=\sin\beta\Rightarrow a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=\pm\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha=\pm\sin(\alpha\pm\beta)\le1.$

7. Для цілих чисел a,b,c виконується рівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Довести, що число $a^2+b^2+c^2$ є точним квадратом.

Розв'язання.

7. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

11 клас

I рівень

1.Розв'язати рівняння $\log_x(x+1)+2\log_{x+1}x=3$.

Розв'язання.

1. ОДЗ: $x>0, x\neq 1$. Нехай $t=\log_x(x+1) \Rightarrow \log_{x+1}x=\frac{1}{t}$. Знаходимо $t=2, t=1$. В першому випадку $x+1=x^2 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. В другому випадку рівняння $x+1=x$ не має коренів. Відповідь: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Порівняти числа $\sin 1^\circ+\sin 2^\circ$ та $\sin 3^\circ$.

Розв'язання.

2. $\left(\sin 1^\circ+\sin 2^\circ\right)-\sin 3^\circ=2\sin 1{,}5^\circ\cos 0{,}5^\circ-2\sin 1{,}5^\circ\cos 1{,}5^\circ=2\sin 1{,}5^\circ\left(\cos 0{,}5^\circ-\cos 1{,}5^\circ\right)>0.$

3. Точки A,B,C лежать одну сторону від заданої площини. Відстані від цих точок до площини дорівнюють 6,2,4 відповідно. Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника ABC до площини.

Розв'язання.

3. Шукана відстань дорівнює середньому арифметичному заданих відстаней 6, 2, 4, тобто 4.

II рівень

4. При яких значеннях параметрів a,b,c рівняння $a\sin^2 x+b\sin x+c=0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

4. Якщо $x=\alpha$ – розв'язок, то $x=\alpha+2\pi n, n\in Z$ – теж розв'язок. Тобто рівняння або не має розв'язків, або має безліч. Шуканих значень параметрів не існує.

5. Знайти об'єм трикутної піраміди $SABC$, якщо задано довжини її ребер $SA=3, SB=4, SC=4, AB=5, AC=5, BC=4\sqrt{2}$.

Розв'язання.

5. З умови $SA^2+SB^2=AB^2, SA^2+SC^2=AC^2, SB^2+SC^2=BC^2 \Rightarrow \angle ASB=\angle ASC=\angle ASC=90^\circ \Rightarrow$ AS – перпендикуляр до $SBC \Rightarrow V=\frac{1}{3}S_{\triangle SBC}\cdot AS=\frac{1}{6}AS\cdot BS\cdot CS=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 4=8.$

III рівень

6. Довести нерівність $\lg 2\sqrt{1-\lg^2 3}+\lg 3\sqrt{1-\lg^2 2}<1.$

Розв'язання.

6. Очевидно $0<\lg 2<\lg 3<0,5.$ Позначимо $\lg 2=\sin\alpha, \lg 3=\sin\beta$ $\left(\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)\right).$ Тоді $\lg 2\sqrt{1-\lg^2 3}+\lg 3\sqrt{1-\lg^2 2}=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)<\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1.$

7. Знайти всі пари простих чисел $p,q,$ при яких рівняння $x^5-px+q=0$ має принаймні один цілий корінь.

Розв'язання.

7. Цілий корінь може бути лише дільником вільного члена, тобто $q.$

1 випадок) корінь дорівнює $\pm q\Rightarrow \pm q^5\mp pq+q=0\Rightarrow \pm p=\pm q^4+1.$ Прості числа $p,q,$ мають різну парність, отже одне з них дорівнює 2. В результаті перебору маємо $p=17, q=2.$

2 випадок) корінь дорівнює $\pm 1\Rightarrow \pm 1\mp p+q=0.$ Прості числа $p,q,$ мають різну парність, отже одне з них дорівнює 2. В результаті перебору маємо $p=3, q=2.$